21

Решите неравенство $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)\left(x-8-\sqrt{3}\right) < 0,$$

откуда $8 < x < 8+\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(8; 8+\sqrt{3}\right)$.

21

Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Решение.

Пусть $t = (x-1)^2$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 - 2t - 3 = 0,$$

откуда $t = -1$ или $t = 3$.

Уравнение $(x-1)^2 = -1$ не имеет корней.

Уравнение $(x-1)^2 = 3$ имеет корни $1-\sqrt{3}$ и $1+\sqrt{3}$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

22 Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 36 км/ч, а вторую — со скоростью 99 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Пусть половина трассы составляет s километров. Тогда первую половину трассы автомобиль проехал за $\frac{s}{36}$ часа, а вторую — за $\frac{s}{99}$ часа. Значит, его средняя скорость в км/ч равна

$$\frac{2s}{\frac{s}{36}+\frac{s}{99}}=52{,}8.$$

Ответ: 52,8 км/ч.

22 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Решение.

Пусть скорость моторной лодки в неподвижной воде равна v км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{77}{v-4}-\frac{77}{v+4}=2;\ 77v+308-77v+308=2v^2-32;\ v^2=324,$$

откуда $v=18$.

Ответ: 18 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

23

Постройте график функции $y=\left|x^2+2x-3\right|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

Построим график функции $y=x^2+2x-3$ при $x<-3$ и $x>1$ и график функции $y=-x^2-2x+3$ при $-3\le x\le 1$.

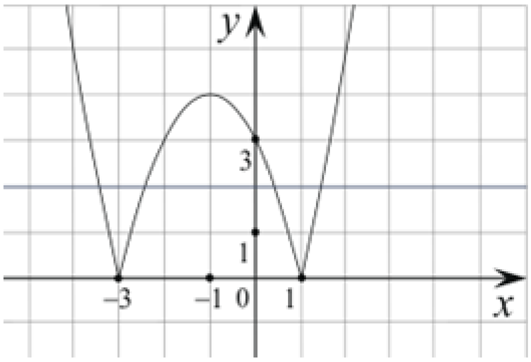


График данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс, 0, 2, 3 или 4 общие точки.

Ответ: 4.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдено искомое количество точек
1	График построен верно, но искомое количество точек найдено неверно или не найдено
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

23

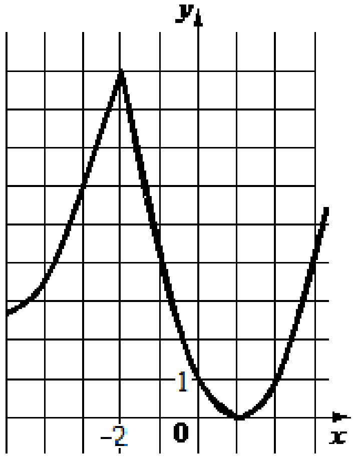
Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\ge -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y=-\dfrac{18}{x}$ при $x<-2$ и график функции $y=x^2-2x+1$ при $x\ge -2$.



Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 0$ и при $m \geq 9$.

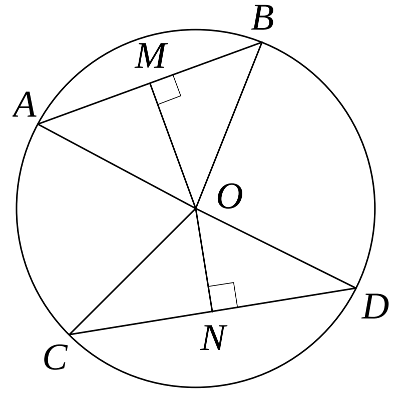
Ответ: 0; $[9; +\infty)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

24

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB=14$, $CD=48$ а расстояние от центра окружности до хорд AB равно 24.

Решение.



Пусть OM и ON — перпендикуляры к хордам AB и CD соответственно. Треугольники AOB и COD равнобедренные, значит, $AM = MB$ и $CN = ND$.

Тогда в прямоугольном треугольнике MOB имеем:

$$OB = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 25.$$

В прямоугольном треугольнике CON гипотенуза $CO = OB = 25$, откуда $ON = \sqrt{OC^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = 7$.

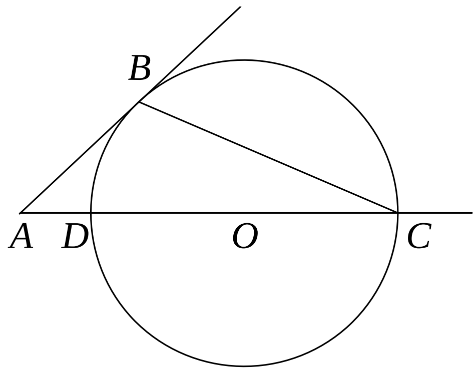
Получаем, что расстояние от центра окружности до хорд CD равно 7.

Ответ: 7.

24

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB=8$, диаметр окружности равен 3,6.

Решение.



Пусть $AC = x$. Тогда по свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем:

$AB^2 = AC(AC - CD)$; $64 = x(x - 3{,}6)$, откуда $x = 10$.

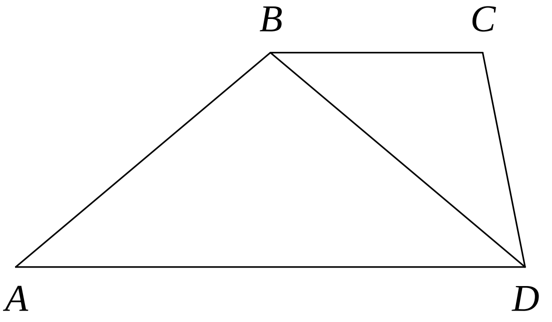
Ответ: 10.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

25

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12, $BD = 6$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Доказательство.



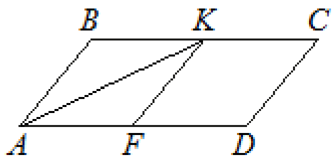
В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие, кроме того, $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{BC} = 2$. Поэтому треугольники CBD и BDA подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

25

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Доказательство.

Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Поскольку $BK = KC = AB$, параллелограмм $ABKF$ является ромбом, поэтому диагональ AK ромба $ABKF$ делит угол BAF пополам. Значит, AK — биссектриса угла BAD.



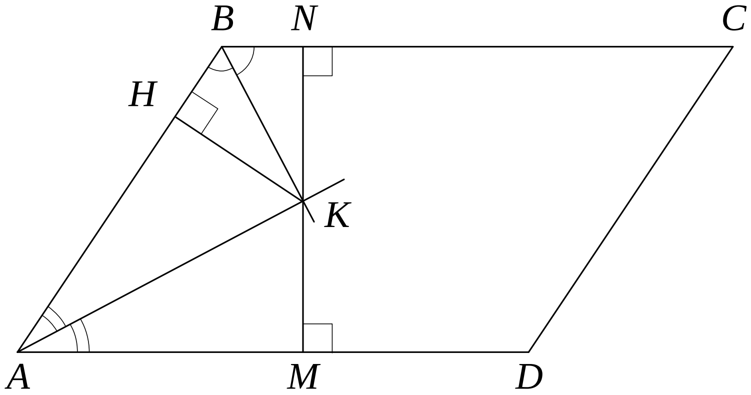
Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

26

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 12$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 9.

Решение.

Пусть KH, KN и KM — перпендикуляры, опущенные из точки K к сторонам AB, BC и AD соответственно (см. рис.). Тогда по свойству биссектрис $KM = KH = KN = 9$.



Кроме того, точки M, K и N лежат на одной прямой и $MN = MK + KN = 18$ — высота параллелограмма $ABCD$.

По формуле площади параллелограмма находим $S_{ABCD} = BC \cdot MN = 12 \cdot 18 = 216$.

Ответ: 216.

26

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

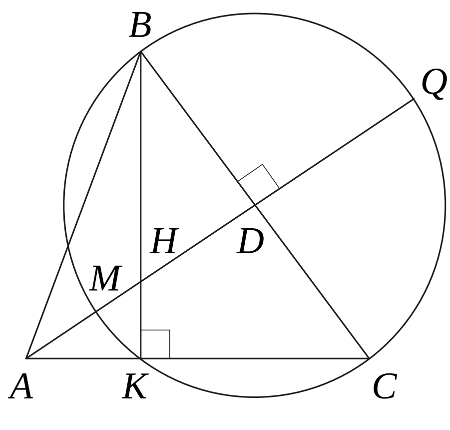
Решение.

Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (см. рис.). Поскольку BK — высота остроугольного треугольника ABC, точка K лежит на стороне AC.

Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q. Тогда $DQ = MD = 3$.

По следствию из теоремы о касательной и секущей
$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = \left(AD - MD\right) \cdot (AD + MQ) =$
$= 6 \cdot 12 = 72$.

Из подобия прямоугольных треугольников AKH и ADC следует, что



$\dfrac{AK}{AH}=\dfrac{AD}{AC}$, откуда $AK\cdot AC=AD\cdot AH=9AH$.

Значит, $9AH=72$. Следовательно, $AH=8$.

Ответ: 8.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*